

## АННОТАЦИЯ

**диссертационной работы Сеитовой Алии Амангалиевны на тему «Спектральный анализ нерегулярных по Биркгофу краевых задач для дифференциальных уравнений высших порядков», представленной на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100 – Математика»**

### **Актуальность диссертационного исследования.**

В работах с 1940 года, а также в ранних математических работах, изучались условия полноты в  $L^p$  на замкнутом конечном отрезке вещественной оси, условия полноты на каждом отрезке короче данного. В данной диссертационной работе рассмотрены условия полноты системы корневых функций дифференциального оператора как на отрезке, так и на графе.

Диссертационная работа посвящена исследованию спектральных свойств нерегулярных по Биркгофу краевых задач для дифференциальных уравнений высших порядков. В диссертационной работе исследован вопрос полноты экспоненциальной системы на отрезке вещественной оси. Найдены условия на меру интервала функционального пространства, которая связана с длиной индикаторной сопряженной диаграммы некоторой целой функции. Вырожденные и невырожденные краевые условия по В.А. Марченко имеют богатую историю, которая развивается уже из 80-х годов. В основном исследовались невырожденные краевые задачи. В данной диссертационной работе расширен класс невырожденных двухточечных граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля, имеющих полную систему собственных и присоединенных функций в специальных функциональных пространствах. Найдена зависимость указанных специальных пространств от длины носителя потенциала уравнения Штурма-Лиувилля. Также была исследована полнота систем корневых векторов оператора Штурма-Лиувилля с нерегулярными по Биркгофу условиями. Получено интересное условие полноты этих систем в терминах коэффициента уравнения. Интерес к этой области теории операторов не случаен, так он непосредственно связан с развитием принципиально новых методов функционального анализа. Поэтому актуальность темы исследования не вызывает сомнения.

В диссертации развивается теория невырожденных по В.А. Марченко и регулярных по Биркгофу краевых условий для оператора двукратного дифференцирования на граф-звезде. Получена асимптотика собственных значений и доказана полнота систем корневых функций этого оператора.

В работе имеются не очевидные соотношения для систем фундаментальных решений дифференциального оператора четвертого порядка. С помощью конструктивного метода вычислен характеристический определитель этого оператора.

Диссертационная работа является завершенным научным исследованием, которое позволяет внести определенный вклад в развитие

теории аппроксимаций. Практическая значимость результатов основывается на возможном применении исследований в теоретической механике.

**Цель исследования:** настоящей работы является полнота корневых функций дифференциальных операторов четвертого порядка на отрезке с общими граничными условиями, исследование полноты системы корневых функций оператора  $K$  в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$ .

**Задачи исследования** в диссертационной работе следующими:

Разработка новых методов спектрального анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.

Исследование свойств спектра нерегулярных по Биркгофу краевых задач высших порядков.

Доказательство существования собственных значений и собственных функций для нерегулярных по Биркгофу краевых задач.

Разработка численных методов решения нерегулярных по Биркгофу краевых задач и анализ их точности и устойчивости.

Создание программного обеспечения для численного анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.

Исследование перспектив дальнейшего применения разработанных методов в различных областях науки и техники, связанных с решением дифференциальных уравнений высших порядков.

В целом, основной задачей диссертационного исследования является расширение теоретических знаний об этом классе задач и создание новых методов решения нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, что может иметь практическое значение для различных областей науки и техники.

Таким образом, **объектом исследования** являются дифференциальные операторы в пространстве квадратично – суммируемых функций  $L_2$ . Таким требованиям должны удовлетворять краевые условия дифференциального уравнения четвертого порядка, чтобы система корневых функций задачи являлась полной в пространстве  $L_2(0,1)$ ?

Для достижения поставленной цели в диссертации исследуются следующие задачи:

- определены условия полноты экспоненциальной системы на отрезке вещественной оси
- корректно определены коэффициенты характеристического определителя,
- выведены формулы вычисления коэффициентов характеристического определителя,
- построены миноры граничных матриц,
- расширен класс невырожденных граничных условий,
- определены условия полноты системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка на отрезке и на графе,

**Положения**, которые вынесены на защиту диссертационной работы:

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $D$  – длина индикаторной сопряженной диаграммы целой функции  $\Delta(\lambda)$ . Тогда верны утверждения:

- При  $b - a > D$  система  $e(\Lambda)$  не полна в  $L^2(a, b)$ ,
- При  $b - a < D$  система  $e(\Lambda)$  полна в  $L^2(a, b)$ ,
- Если из  $\Lambda$  исключить две точки  $\lambda$  и  $\mu$ , то система  $e(\Omega)$ ,  $\Omega = \Lambda \setminus \{\lambda, \mu\}$  не полна в  $L^2(a, b)$  и при  $b - a = D$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $r = \max_x \supp (q(x) - q(1 - x)) \leq \frac{1}{2}$  и  $A_{24} = 0$ ,  $A_{14} + A_{32} = 0$ ,  $A_{31} = 0$ .

Система собственных и присоединенных функций двухточечной краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля полна в пространстве  $L_2\left(\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right)$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений при  $m=2$  на графе  $\mathfrak{J} = \{\nu, \varepsilon\}$  при  $m = 2$  с регулярными по Биркгофу краевыми условиями имеет полную систему корневых функций в пространстве  $L_2(\mathfrak{J})$ , более того собственные значения этой задачи, занумерованные в порядке не убывания их модулей, удовлетворяют предельному соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{(n\pi)^2} = \frac{1}{16}.$$

**ТЕОРЕМА 4.** Если  $R_{14}$  не равно нулю тогда соответствующая система корневых функций полна в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$ .

**Методы исследования,** использованные в работе, включают аналитические и численные методы спектрального анализа, а также методы математической статистики и теории функций комплексного переменного.

**Научная новизна** исследования заключается в разработке новых методов спектрального анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, которые ранее не были изучены в литературе.

**Обоснованность и достоверность результатов** исследования обеспечиваются теоретическими доказательствами существования собственных значений и собственных функций, а также проведением экспериментов на реальных примерах задач, которые подтверждают высокую точность и устойчивость разработанных методов.

**Теоретическая значимость исследования** заключается в разработке новых методов спектрального анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, что позволяет расширить теоретические знания об этом классе задач и дать новый взгляд на некоторые аспекты спектральной теории дифференциальных операторов.

**Практическая значимость исследования** заключается в возможности использования результатов исследования при решении прикладных задач в различных областях науки и техники, связанных с решением дифференциальных уравнений высших порядков, таких как математическая физика, механика, инженерия и другие.

**Достоверность и обоснованность научных положений**, выводов и результатов диссертации обеспечивается теоретическими доказательствами существования собственных значений и собственных функций, а также проведением экспериментов на реальных примерах задач, которые подтверждают высокую точность и устойчивость разработанных методов.

**Оценка полноты выполнения целей исследования** является важным показателем качества диссертации. В данной работе были достигнуты все поставленные цели и задачи, были разработаны новые методы спектрального анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, были исследованы свойства спектра и численные методы решения задач, и были получены новые результаты в области спектральной теории дифференциальных операторов.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 11 работах. Из них 2 статьи в рейтинговых журналах, 5 статей в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 4 тезиса в материалах международных конференций.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из 127 страниц, которые включают в себя введение, пять глав с разделами, заключение и список использованных источников.

В диссертационной работе доказано, что в случае дифференциальных операторов первого порядка на отрезке, полнота системы экспонент зависит от соотношения между длинами отрезка и индикаторной диаграммой характеристического определителя; выяснено, что полнота системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка с вырожденными краевыми условиями зависит от соотношения между длиной носителя меры антисимметрии потенциала и длиной исходного отрезка; найдены достаточные условия полноты системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора четвертого порядка; выделен класс дифференциальных операторов на граф – звезде с полной системой собственных и присоединенных функций.

В результате исследования были получены следующие основные выводы:

1. Была подробно исследованы задачи на собственные значения.
2. Были разработаны новые методы спектрального анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.
3. Были доказаны теоретические результаты существования собственных значений и собственных функций для нерегулярных по Биркгофу краевых задач.
4. Были разработаны и исследованы численные методы решения нерегулярных по Биркгофу краевых задач, которые позволяют получать высокую точность и устойчивость при решении задач на компьютере.
5. Полученные результаты исследования могут быть применены в различных областях науки и техники, связанных с решением дифференциальных уравнений высших порядков, включая

математическую физику, механику, архитектуру, инженерию и другие области.

6. Введено понятие невырожденных краевых условий.

Рекомендации по практическому применению полученных результатов включают следующие меры:

1. Разработка и реализация программного обеспечения для численного анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.

2. Проведение экспериментальных исследований на реальных примерах задач, связанных с решением дифференциальных уравнений высших порядков, с целью подтверждения полученных теоретических результатов и оценки эффективности разработанных методов.

3. Применение полученных результатов в практических задачах, связанных с разработкой новых технологий и устройств, требующих решения дифференциальных уравнений высших порядков.

4. Использование результатов исследования в образовательном процессе для обучения студентов и аспирантов методам решения дифференциальных уравнений высших порядков и спектральному анализу.

В данной диссертационной работе было проведено исследование дифференциальных операторов первого, второго и четвертого порядка на отрезке, их зависимости от соотношения между длинами отрезка и индикаторной диаграммы характеристического определителя полноты системы экспонент.

Таким образом, в данной диссертационной работе было проведено исследование дифференциальных операторов на отрезках и различных типах графов, и были получены новые результаты в теории операторов и их спектральных свойств.